# 概率论第 4 次习题课讲义

宗语轩

2022 秋, USTC

## 0.1 期中考试(预)复习建议

优先顺序: 笔记 + 作业题 > 习题课 + 精选题 > 往年真题. 按近两年惯例, 笔记 + 作业题中一定会出原题, 另外一般会出一道精选题 (不是必然事件), 另外注意以下几点:

1. 复习笔记一定要关注笔记出现的基本的概念定义 (如事件域、概率空间、概率测度、独立性、随机变量和分布函数等)、定理引理和概念辨析 (联系和反例, 这部分也可以配合习题课讲义一同食用), 同时对最典型最深刻的例子要熟练掌握.
   **例如: 举一个离散随机变量 $X, Y$, 他们不相关但不独立的例子.**

2. 总体来说, 教材前两章更偏重基本概念的理解及运用 (当然也可能从中出难题, ~~若考到默写题和简单的寄算和古典概型问题千万不要阴沟里翻船~~), 第三章 + 母函数相对来说内容很多且尤为重要, 一方面接触到期望/方差/协方差/条件期望等这些概念, 以及随机游走模型和母函数方法. 另一方面从这里出题的话也会更为综合.
   同时, 也不要忽视和学过课程知识的结合 (淑芬线代甚至简单的初等数论等等).
   ~~如果连笔记和作业题这种原题都送不到手, 最后总评没给到优秀的话您还是别嚷嚷给分了~~.

3. 考试很可能会有一定难度 (可以适当参考往年真题), 遇到难题的话只要有任何可能合理的想法, 公式等等一定要写在答卷上, 能猜答案的一定要猜答案, 遇到分类讨论的题目把简单情形也要写上 $\cdots$ 不管最后批卷松紧如何, 批改原则一定是**量化**给过程分.

# 1 作业讲评

**注.** 作业中有两个常见问题:

1. 运用概率方法求解问题时, 一定要有概率条件假设的前提.

2. $\mathbb{E}[Y|X]$ 为一个与 $X$ 有关的**随机变量**, 而 $\mathbb{E}[Y|X=x]$ 是一个定值. **3.7.1** 中

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \sum_y y f_{Y|X}(y|x) \neq \mathbb{E}[Y|X]$$

[0]个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.
发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

**3.4.4** 另解: 设 $X_k$ 为第 $k$ 次交换后 $R$ 中红球个数, 我们有

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=a+1|X_k=a)=\left(1-\frac{a}{n}\right)^2,\quad \mathbb{P}(X_{k+1}=a|X_k=a)=2\frac{a}{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)$$
$$\mathbb{P}(X_{k+1}=a-1|X_k=a)=\left(\frac{a}{n}\right)^2.$$

利用条件期望, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{k+1}]&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{k+1}|X_k]]\\&=(\mathbb{E}[X_k]+1)\left(1-\frac{\mathbb{E}[X_k]}{n}\right)^2+2\mathbb{E}[X_k]\frac{\mathbb{E}[X_k]}{n}\left(1-\frac{\mathbb{E}[X_k]}{n}\right)+(\mathbb{E}[X_k]-1)\left(\frac{\mathbb{E}[X_k]}{n}\right)^2\\&=\left(1-\frac{2}{n}\right)\mathbb{E}[X_k]+1.\end{aligned}$$

解得

$$\mathbb{E}[X_k]=\frac{n}{2}\left(1+\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right).$$

**3.4.7** 对顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 随机选取 $W\subseteq V$, 使得 $\mathbb{P}(v_i\in W)=\mathbb{P}(v_i\notin W)=\dfrac{1}{2}$ 且相互独立. 则对 $\forall e\in E$, 有

$$\mathbb{E}[I_W(e)]=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

因此

$$\mathbb{E}[N_W]=\sum_{e\in E}\mathbb{E}[I_W(e)]=\frac{|E|}{2}.$$

故存在集合 $W\subseteq V$, 使得 $N_W\geqslant\dfrac{|E|}{2}$.

**3.6.5** (a) 我们有

$$\mathbb{E}\left[\log\frac{f_Y(x)}{f_X(x)}\right]=\sum_x\left(f_X(x)\log\frac{f_Y(x)}{f_X(x)}\right)\leqslant\sum_x f_X(x)\left(\frac{f_Y(x)}{f_X(x)}-1\right)=\sum_x f_Y(x)-\sum_x f_X(x)=0.$$

等号当且仅当 $f_X(x)=f_Y(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 取等, 即 $X\overset{d}{=}Y$.

(b) 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\log\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f(x,y)}\right]&=\sum_{x,y}\left(f(x,y)\log\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f(x,y)}\right)\leqslant\sum_{x,y}f(x,y)\left(\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f(x,y)}-1\right)\\&=\sum_{x,y}f_X(x)f_Y(y)-\sum_{x,y}f(x,y)=0.\end{aligned}$$

等号当且仅当 $f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 取等, 即 $X,Y$ 独立.

**5.1.7** 注意到

$$G(x)=G(x,1,1,1)=\frac{1}{2}(x+1),\qquad G(x,y)=G(x,y,1,1)=\frac{1}{4}(x+1)(y+1).$$

及

$$G(x,y,z)=G(x,y,z,1)=\frac{1}{8}(x+1)(y+1)(z+1).$$

可知

$$G(x,y)=G(x)G(y),\quad G(x,y,z)=G(x)G(y)G(z),\quad G(x,y,z,w)\neq G(x)G(y)G(z)G(w).$$

**5.1.9** 三者都是母函数. 因为

$$G(s)\text{ 是概率母函数} \Longleftrightarrow G(s)\text{ 系数非负且 } G(1)=1.$$

前两个自行验证. 最后一个注意到

$$G(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\mathbb{P}(X=k),\qquad \frac{G(\alpha s)}{G(\alpha)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k\mathbb{P}(X=k)}{G(\alpha)}s^k$$

即可.

**补充题 1** 证明: 存在 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n\in\{-1,1\}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i a_i\right)^2\geqslant\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

**证明.** 令 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$ $i.i.d$ $\mathbb{P}(\varepsilon_i=1)=\mathbb{P}(\varepsilon_i=-1)=\dfrac{1}{2}$. 则有

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i a_i\right)^2\right]=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[\varepsilon_i^2a_i^2]+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_j a_i a_j]=\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

故存在 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n\in\{-1,1\}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i a_i\right)^2\geqslant\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

□

**补充题 2** 见本讲义**例 2.4**.

# 2 专题选讲

## 2.1 概率母函数

**定义 2.1.** 非负整数值随机变量 $X$ 的(概率) 母函数: $G_X(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X = i)$.

**定义 2.2.** $(X, Y)$ 非负整数值向量, 联合概率母函数

$$G(s,t) := \mathbb{E}[s^X t^Y] = \sum_{i,j=0}^{\infty} s^i t^j \mathbb{P}(X = i, Y = j).$$

$G(s)$ 为概率母函数的判定条件: $G(s)$ 系数非负, $G(1) = 1$.

概率母函数的优点是它简单, 在离散型随机过程中会用到相关结果. 后续的一一对应说明, 对这类随机变量概率分布的研究可转化为母函数的研究, 加之母函数是一类幂级数, 有许多好的性质以便于处理, 尤其用于求概率分布的数字特征 (矩) 上. 缺点一方面是其局限性大 (仅适用于非负整数值随机变量), 另一方面是不能用其完全确定分布函数. 以上问题会通过引入特征函数来解决, 以后上课会讲.

概率母函数的**性质**:

(1) 唯一性: 对非负整值随机变量 $X$, 母函数 $\Longleftrightarrow$ 分布列.
$\Longleftarrow$: 定义;
$\Longrightarrow$: $G_X(s)$ 是在 $(-R, R)$ 内任意阶可微的幂级数 $(R \geq 1)$, 并有

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{G^{(i)}(0)}{i!}.$$

(2) 算矩: $\mathbb{E}[X] = G'(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = G^{(k)}(1)$, $Var(X) = G''(1) + G'(1)(1 - G'(1))$.

(3) 卷积: 设 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, $G_k(s) = \mathbb{E}[s^{X_k}]$. 则 $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 母函数为

$$G_Y(s) = G_1(s) \cdots G_n(s).$$

(4) 套娃: 设 $\{X_k : k \geq 1\}$i.i.d, 母函数为 $G_X(s)$, 随机变量 $N$ 与 $\{X_k : k \geq 1\}$ 独立, 其母函数为 $G_N(s)$. 则 $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ 有母函数

$$G_Y(s) = G_N(G_X(s)).$$

(5) 独立: $X$ 与 $Y$ 独立 $\Leftrightarrow G(s,t) = G_X(s)G_Y(t)$.

**例 2.1.** 计算以下常见离散型的母函数及矩:

(1) 二项分布: $X \sim B(n,p)$, $G_X(s) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i p^i q^{n-i} s^i = (ps+q)^n$. 利用

$$G'_X(1) = np(ps+q)\Big|_{s=1} = np, \qquad G''_X(1) = n(n-1)p^2(ps+q)\Big|_{s=1} = n(n-1)p^2$$

可求得

$$\mathbb{E}[X] = np, \qquad Var(X) = np(1-p).$$

(2) 几何分布: $X$ 服从参数为 $p$ 的几何分布,$G_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1}s^i = \frac{ps}{1-qs}$. 利用

$$G'_X(1) = \frac{p}{(1-qs)^2}\Big|_{s=1} = \frac{1}{p}, \qquad G''_X(1) = \frac{2pq}{(1-qs)^3}\Big|_{s=1} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

可求得

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}, \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(3) 泊松分布: $X \sim P(\lambda)$, $G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$. 利用

$$G'_X(1) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda, \qquad G''_X(1) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda^2$$

可求得

$$\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda.$$

**注.** 可以通过母函数来验证一些离散型随机变量的**可加性**:
二项分布: $X_1 \sim B(n_1,p), X_2 \sim B(n_2,p)$, $X_1$ 与 $X_2$ 独立, 则

$$G_{X_1+X_2}(s) = (ps+q)^{n_1+n_2}$$

即 $X_1 + X_2 \sim B(n_1+n_2,p)$.
泊松分布: $X_1 \sim P(\lambda_1), X_2 \sim P(\lambda_2), X_1$ 与 $X_2$ 独立, 则

$$G_{X_1+X_2}(s) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$$

即 $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

**引理 2.1.** 设 $\{X_k : k \geq 1\}$ i.i.d $X$, 随机变量 $N$ 与 $\{X_k : k \geq 1\}$ 独立, $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$. 用母函数的方法证明:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X], \qquad Var(Y) = \mathbb{E}[N] \cdot Var[X] + Var[N] \cdot (\mathbb{E}[X])^2.$$

**注.** 在本课程的作业和考试中若使用该引理必须给出证明.

**证明.** 记 $X$ 的母函数为 $F(s)$, $N$ 的母函数为 $G(s)$. 则 $Y$ 的母函数为 $Y(s)=G(F(s))$. 而

$$Y'(s)=G'(F(s))F'(s),\qquad Y''(s)=G''(s)(F(s))(F'(s))^2+G'(F(s))F''(s).$$

因此有

$$\mathbb{E}[Y]=Y'(1)=G'(F(1))F'(1)=G'(1)F'(1)=\mathbb{E}[N]\cdot\mathbb{E}[X]$$

及

$$\begin{aligned}Var(Y)=Y''(1)+Y'(1)-(Y'(1))^2&=G''(1)(F'(1))^2+G'(1)F''(1)+G'(1)F'(1)-(G'(1)F'(1))^2\\&=G'(1)(F''(1)+F'(1)-(F'(1))^2)+(F'(1))^2(G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2)\\&=\mathbb{E}[N]\cdot Var[X]+Var[N]\cdot(\mathbb{E}[X])^2.\end{aligned}$$

□

**例 2.2.** 设 $S_N=X_1+X_2+\cdots+X_N$ 为 $N$ 个相互独立的随机变量之和, 其中每个随机变量等概率地取值 $1,2,\cdots,m$. 求:

(1) $S_N$ 的概率母函数 $G(s)$.

(2) 关于 $k$ 的序列 $\mathbb{P}(S_N\leqslant k)$ 的母函数 $G_1(s)$.

(3) 设 $N$ 服从参数为 $p\in(0,1)$ 的几何分布, 且 $N$ 与 $\{X_k:k\geq 1\}$ 独立, 试回答 (2) 中的问题.

**解.** (1) 我们有

$$G(s)=(\mathbb{E}[S^X])^N=\left(\frac{\sum_{k=1}^m s^k}{m}\right)^N=\left(\frac{s(1-s^m)}{m(1-s)}\right)^N.$$

(2) 注意到 $\mathbb{P}(S_N\leqslant 0)=0$, 我们有

$$G(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_N=k)s^k=\sum_{k=1}^{\infty}(\mathbb{P}(S_N\leqslant k)-\mathbb{P}(S_N\leqslant k-1))s^k=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_N\leqslant k)s^k-s\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_N\leqslant k)s^k\right)$$

因此

$$G_1(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_N\leqslant k)s^k=\frac{G(s)}{1-s}=\frac{s^N(1-s^m)^N}{m^N(1-s)^{N+1}}.$$

(3) 记 $N$ 的母函数是 $G_N(s)$, **例 2.1** 已求得 $G_N(s)=\dfrac{ps}{1-(1-p)s}$, 故 (2) 中母函数 $G_0(s)$ 为

$$G_0(s)=G_N(G_1(s))=\frac{pG_1(s)}{1-(1-p)G_1(s)}=\frac{ps(1-s^m)}{m(1-s)^2-s(1-s^m)(1-s)(1-p)}.$$

□

## 2.2 一维简单随机游走

$S_0=a, S_n=S_{n-1}+X_n=S_0+\sum_{i=1}^{n}X_i$ $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 且 $\mathbb{P}(X_i=1)=p, \mathbb{P}(X_i=-1)=q$, 这里 $p+q=1$.

**注.** $p=\frac{1}{2}$ 时, 对称简单随机游走.

课堂上我们已经讲了双吸收壁模型、时齐性 + 空齐性 +Markov 性、计数 $N_n(a,b)$、反射原理及其应用—投票定理, 接下来我们再补充一些内容.

我们先回顾投票定理:

**定理 2.1** (投票定理)**.** 若 $b>0$, 则

$$\#\{\text{从}(0,0)\text{到}(n,b)\text{且不再过}x\text{轴轨道}\}=\frac{b}{n}N_n(0,b).$$

由此推出:

**定理 2.2** (不返回出发点)**.** $S_0=0, n\geq 1$, 则

$$\mathbb{P}(S_1S_2\cdots S_n\neq 0, S_n=b)=\frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n=b).$$

因此有

$$\mathbb{P}(S_1S_2\cdots S_n\neq 0)=\frac{1}{n}\mathbb{E}[|S_n|].$$

**证明.** 不妨设 $b>0$, 利用投票定理得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1S_2\cdots S_n\neq 0, S_n=b)&=\frac{b}{n}N_n(0,b)p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}\\&=\frac{b}{n}\mathbb{P}(S_n=b).\end{aligned}$$

□

设 $M_n=\max\{S_i:0\leq i\leq n\}$, 当 $S_0=0$ 时, $M_n\geq 0$.

**定理 2.3.** $S_0=0, r\geq 1$, 则有

$$\mathbb{P}(M_n\geq r, S_n=b)=\begin{cases}\mathbb{P}(S_n=b), & b\geq r,\\ \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}\mathbb{P}(S_n=2r-b), & b<r.\end{cases}$$

**证明.** 仅考虑 $b<r$, 记

$$Q=\{(0,0)\to(n,b)\text{且过某点}(i,r)\}$$

$\forall\pi\in Q$, 记 $(i_\pi,r)$ 为 $\pi$ 与 $y=r$ 的第一个交点, 然后反射 $(i_\pi,r)$ 后面部分得到新轨道 $\pi'$(连接 $(0,0)$ 与 $(n,2r-b)$), 两者有 $1-1$ 对应. 而

$$\frac{\mathbb{P}(\pi)}{\mathbb{P}(\pi')}=\frac{p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}}{p^{\frac{n+2r-b}{2}}q^{\frac{n-2r+b}{2}}}=\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b},$$

因此

$$\mathbb{P}(M_n \geq r, S_n = b) = \sum_{\pi \in Q} \mathbb{P}(\pi) = \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} \sum_{\pi'} \mathbb{P}(\pi') = \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} \mathbb{P}(S_n = 2r - b).$$

□

**注.** 当 $p = \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \geq r) &= \mathbb{P}(S_n \geq r) + \sum_{b=-\infty}^{r-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} \mathbb{P}(S_n = 2r - b) \xlongequal{c=2r-b} \mathbb{P}(S_n \geq r) + \sum_{c=r+1}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{c-r} \mathbb{P}(S_n = c) \\ &= \mathbb{P}(S_n = r) + \sum_{c=r+1}^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{c-r}\right) \mathbb{P}(S_n = c) \\ &\xlongequal{p=\frac{1}{2}} \mathbb{P}(S_n = r) + 2\mathbb{P}(S_n \geq r + 1).\end{aligned}$$

**定理 2.4** (首中时定理)**.** $S_0 = 0$, 在时刻 $n$ 首次击中点 $b$ 概率为

$$f_b(n) = \frac{|b|}{n} \mathbb{P}(S_n = b), \ n \geq 1.$$

**证明.** 不妨设 $b > 0$, 注意此时 $t = n$ 时达到新的最大值点, 因此

$$\begin{aligned}f_b(n) &= \mathbb{P}(S_n = b, M_{n-1} = b - 1, S_{n-1} = b - 1) = \mathbb{P}(M_{n-1} = S_{n-1} = b - 1, X_n = 1) \\ &= p\mathbb{P}(M_{n-1} = b - 1, S_{n-1} = b - 1) \\ &= p\left(\mathbb{P}(M_{n-1} \geq b - 1, S_{n-1} = b - 1) - \mathbb{P}(M_{n-1} \geq b, S_{n-1} = b - 1)\right) \\ &\xlongequal{\text{定理2.3}} p\mathbb{P}(S_{n-1} = b - 1) - p \cdot \frac{q}{p} \mathbb{P}(S_{n-1} = b + 1) = \frac{n+b}{2n} \mathbb{P}(S_n = b) - \frac{n-b}{2n} \mathbb{P}(S_n = b) \\ &= \frac{b}{n} \mathbb{P}(S_n = b),\end{aligned}$$

□

**注.** 对比**定理 2.1** 和**定理 2.2**, 思考能否类同投票定理计数观点来说明上述定理?

**定理 2.5.** $p = \frac{1}{2}$, $S_0 = 0$, 记最后一次访问原点: $T_{2n} = \max\{0 \leq i \leq 2n : S_i = 0\}$, 则有

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0).$$

**证明.**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) &= \mathbb{P}(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \cdots S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2k+1} \cdots S_{2n} \neq 0 \mid S_{2k} = 0) \\ &\xlongequal{\text{时齐性}} \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_1 S_2 \cdots S_{2n-2k} \neq 0).\end{aligned}$$

令 $m = n - k$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 \cdots S_{2m} \neq 0) &\xlongequal{\text{定理2.2}} \frac{1}{2m} \mathbb{E}[|S_{2m}|] = \frac{2}{2m} \sum_{i=1}^{m} 2i \cdot \mathbb{P}(S_{2m} = 2i) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \sum_{i=1}^{m} \frac{m+i-(m-i)}{2m} \binom{2m}{m+i} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(\binom{2m-1}{m+i-1} - \binom{2m-1}{m+i}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \binom{2m}{m} \\ &= \mathbb{P}(S_{2m} = 0).\end{aligned}$$

□

**注.** $\mathbb{P}(S_1S_2\cdots S_{2m}\neq 0)=\mathbb{P}(S_{2m}=0)$.

**Stirling 公式**: $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}, n\to\infty$. 因此

$$\mathbb{P}(S_{2k}=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\binom{2k}{k}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}, k\to\infty,$$

$$\mathbb{P}(S_{2n-2k}=0)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}}, n-k\to\infty.$$

**例 2.3** (反正弦律). 按**定理 2.5**, $n\to+\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n}\le 2xn)=\sum_{k:k\le xn}\mathbb{P}(T_{2n}=2k)&\sim\sum_{\frac{k}{n}\le x}\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}=\sum_{\frac{k}{n}\le x}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}\cdot\frac{1}{n}\\&\sim\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{\pi\sqrt{u(1-u)}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x},\end{aligned}$$

即 $\frac{T_{2n}}{2n}$ 的渐近分布为 $\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$.

**例 2.4.** 直线上简单随机游动 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k, S_0=0$, 这里 $X_i$ i.i.d 且 $P(X_i=1)=p, P(X_i=-1)=1-p, 0<p<1$.

(1) 求 $\mathbb{E}(S_n), Var(S_n), Cov(S_m,S_n)$.

(2) $Y$ 服从参数为 $p$ 的几何分布且与 $\{X_k\}$ 独立时, 求 $Var(S_Y)$.

(3) 对正整数 $k$, 求 $S_{n+k}$ 关于 $S_n$ 的条件分布列 $f_{S_{n+k}|S_n}$ 与条件期望 $\mathbb{E}[S_{n+k}|S_n]$.

(4) 求 $\mathbb{P}(S_1\geqslant -1, S_2\geqslant -1,\cdots S_{2n-2}\geqslant -1, S_{2n-1}=-1)$.

**解.** (1) 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n]&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]=n(2p-1),\\ Var(S_n)&=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=n(\mathbb{E}[X_i^2]-(\mathbb{E}[X_i])^2)=n(1-(2p-1)^2)=4np(1-p),\\ Cov(S_m,S_n)&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}}Var(X_i)=4\min\{m,n\}p(1-p).\end{aligned}$$

(2) 可直接取条件期望或母函数计算求解, 也可以通过**引理 2.1(在本课程的作业和考试中若使用该引理必须给出证明)** 求得

$$Var(S_Y)=\mathbb{E}[Y]\cdot Var[X_1]+Var[Y]\cdot(\mathbb{E}[X_1])^2=\frac{1}{p}\cdot 4p(1-p)+\frac{1-p}{p^2}\cdot(2p-1)^2=\frac{(1-p)(8p^2-4p+1)}{p^2}.$$

(3) 利用空齐性和时齐性, 我们有

$$\mathbb{P}(S_{n+k}=a+b|S_n=a)=\mathbb{P}(S_k=b|S_0=0)=\begin{cases}\binom{k}{\frac{k+b}{2}}p^{\frac{k+b}{2}}(1-p)^{\frac{k-b}{2}}, & 2\mid(k+b)\\ 0, & 2\nmid(k+b)\end{cases}$$

且有

$$\mathbb{E}[S_{n+k}|S_n]=\mathbb{E}[S_n+X_{n+1}+\cdots+X_{n+k}|S_n]=S_n+\sum_{k=n+1}^{n+k}\mathbb{E}[X_k|S_n]\xlongequal{\text{独立}}S_n+\sum_{k=n+1}^{n+k}\mathbb{E}[X_k]=S_n+k(2p-1).$$

(4) 利用首中时原理, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1\geqslant -1,\cdots S_{2n-2}\geqslant -1,S_{2n-1}=-1)&=\frac{1}{1-p}\mathbb{P}(S_1\geqslant -1,\cdots S_{2n-2}\geqslant -1,S_{2n-1}=-1,S_{2n}=-2)\\&=\frac{1}{1-p}\mathbb{P}(S_1\geqslant -1,\cdots S_{2n-2}\geqslant -1,S_{2n-1}\geqslant -1,S_{2n}=-2)\\&=\frac{1}{1-p}\frac{2}{2n}\mathbb{P}(S_{2n}=-2)\\&=\frac{1}{n(1-p)}\binom{2n}{n+1}p^{n-1}(1-p)^{n+1}.\end{aligned}$$

□

## 2.3 一维简单随机游走的双吸收壁模型及其应用

在课堂上我们已解决如下问题:

问题: 粒子在 $t=0$ 时处于 $x=k$, 在 $x=a,b$ 处各有一个吸收壁 (移动到 $a$ 或 $b$ 处时停止). 现在粒子进行一维简单随机游走, 求粒子在 $x=a,b$ 处吸收概率. $(a<k<b)$

**解.** 记 $p_k$为初始处于$x=k$且最后在$x=a$吸收概率,$p_k^*$为初始处于$x=k$且最后在$x=b$吸收概率, 第一步之后全概率公式

$$p_k=pp_{k+1}+qp_{k-1},a<k<b$$

边界条件: $p_a=1,p_b=0$, 记 $r=\dfrac{q}{p}$, 则

$$p_{k+1}-p_k=r(p_k-p_{k-1})$$

解之

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{r^{k-a}-r^{b-a}}{1-r^{b-a}}, & r\neq 1,\\ 1-\dfrac{k-a}{b-a}, & r=1.\end{cases}$$

$$p_k^*=\begin{cases}\dfrac{1-r^{k-a}}{1-r^{b-a}}, & r\neq 1,\\ \dfrac{k-a}{b-a}, & r=1.\end{cases}$$

□

这就是一维简单随机游走的双吸收壁模型, 下面我们继续探究其性质.

**例 2.5.** 双吸收壁模型下, 记 $T$ 为粒子初始状态在 $k$ 下被吸收时经过的总时间, 求 $\mathbb{E}_k[T]$.

**解.** 取条件期望, 有

$$\mathbb{E}_k[T] = p(\mathbb{E}_{k+1}[T]+1) + q(\mathbb{E}_{k-1}[T]+1) = p\mathbb{E}_{k+1}[T] + q\mathbb{E}_{k-1}[T] + 1.$$

记 $r = \dfrac{q}{p}$, 化简得

$$\mathbb{E}_{k+1}[T] - \mathbb{E}_k[T] = r(\mathbb{E}_k[T] - \mathbb{E}_{k-1}[T]) - \frac{1}{p}$$

再利用 $0 = \mathbb{E}_b[T] - \mathbb{E}_a[T] = \sum\limits_{k=a}^{b-1}(\mathbb{E}_{k+1}[T] - \mathbb{E}_k[T])$, 可得

$$\mathbb{E}_{k+1}[T] - \mathbb{E}_k[T] = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{r^{k-a}(b-a)}{1-r^{b-a}} + \dfrac{1}{r-1}\right), & r \neq 1, \\ b+a-2k-1, & r = 1. \end{cases}$$

所以

$$\mathbb{E}_k[T] = \mathbb{E}_k[T] - \mathbb{E}_a[T] = \sum_{t=a}^{k-1}(\mathbb{E}_{t+1}[T] - \mathbb{E}_t[T]) = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p}\left[(k-a) - (b-a)\left(\dfrac{1-r^{k-a}}{1-r^{b-a}}\right)\right], & r \neq 1, \\ (k-a)(b-a-k), & r = 1. \end{cases}$$

□

**例 2.6.** 一维简单随机游走 $S_n$, $S_0 = 0$. 记 $\tau_m = \inf\{n \geqslant 1 : S_n = m\}$. 证明:

$$\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = \begin{cases} 1, & r \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{r}, & r > 1. \end{cases} \qquad \mathbb{E}[\tau_1] = \begin{cases} +\infty, & r \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{2p-1}, & r < 1. \end{cases}$$

这道题其实是单吸收壁, 但我们可以在 $x = -n, 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ 两处均放置吸收壁, 然后让 $n \to +\infty$ 来进行转化. 双吸收壁模型下记 $p^{(n)}$为最后在$x = 1$处吸收概率, $T^{(n)}$ 为粒子被吸收时经过的总时间. 注意到

$$\lim_{n\to+\infty} p^{(n)} = \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty), \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[T^{(n)}] = \mathbb{E}[\tau_1],$$

这里单调性 (单调收敛定理) 保证其成立. 再结合上述两问题即可.

**注.** 由此可计算 $\mathbb{P}(\tau_0), \mathbb{E}[\tau_0]$, 另外请读者自行验证: $\tau_2 - \tau_1$ 与 $\tau_1$ 独立同分布 (在 $\tau_1 < +\infty$ 意义下). 可类推得 $\tau_{n+1} - \tau_n, \tau_n - \tau_{n-1}, \cdots, \tau_2 - \tau_1, \tau_1$ 独立同分布 (在 $\tau_n < +\infty$ 意义下). 即为强马氏性. 由此可得

$$\mathbb{P}(\tau_n < +\infty) = \begin{cases} 1, & r \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{r^n}, & r > 1. \end{cases} \qquad \mathbb{E}[\tau_n] = \begin{cases} +\infty, & r \leqslant 1, \\ \dfrac{n}{2p-1}, & r > 1. \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_n<\infty)&=\mathbb{P}(\tau_n<\infty,\tau_{n-1}<\infty)=\mathbb{P}(\tau_n-\tau_{n-1}<\infty,\tau_{n-1}<\infty)=\mathbb{P}(\tau_n-\tau_{n-1}<\infty)\mathbb{P}(\tau_{n-1}<\infty)\\&=\mathbb{P}(\tau_1<\infty)\mathbb{P}(\tau_{n-1}<\infty)\\&\vdots\\&=\mathbb{P}(\tau_1<\infty)^k.\end{aligned}$$

及

$$\mathbb{E}[\tau_n]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^n(\tau_i-\tau_{i-1})+\tau_1\right]=\sum_{i=2}^n\mathbb{E}\left[[\tau_i-\tau_{i-1}\right]+\mathbb{E}[\tau_1]=n\mathbb{E}[\tau_1].$$

**例 2.7.** 考虑一质点, 它沿着按一个圆周排列的标以 $0,1,\cdots,m$ 的 $m+1$ 个节点移动. 在每一步质点等概率按顺时针或逆时针方向移动至下一个位置. 现在质点从 0 出发按上述规则移动, 直到节点 $1,2,\cdots,m$ 均被访问过位置. 求最后一个被访问的节点是 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的概率.

**解.** 考虑首次访问 $i$ 的相邻两节点 $i-1$, $i+1$ 中之一 (该事件为必然事件).

若节点 $i-1$ 先于 $i+1$ 被访问, 因为 $i,i+1$ 均没有被访问, 所以 $i$ 为最后一个访问点等价于 $i+1$ 在 $i$ 之前被访问, 而其等价于一维简单对称随机游走中质点从 $x=1$ 出发并在 $x=0,m$ 两处均放置吸收壁的双吸收壁模型上求质点被 $m$ 吸收的概率 (可以将节点 $i$ 为头, 节点 $i+1$ 为尾的 $m+1$ 个点圆弧拉成一条线段), 而问题中已求得其概率为 $\dfrac{1}{m}$.

若节点 $i+1$ 先于 $i-1$ 被访问, 由对称性同理可知其概率为 $\dfrac{1}{m}$. 利用全概率公式即得最后一个被访问的节点是 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的概率是 $\dfrac{1}{m}$. □

# 3 补充习题

### 1 Grimmett 3.5.4, 3.11.27, 3.11.28, 5.12.8, 5.12.15

**2** 平面上一粒子 "向右向上" 随机游走, $S_0=0,S_n=S_{n-1}+X_n,n=1,2,\cdots$, 这里 $X_i$ i.i.d $\mathbb{P}(X_i=(1,0))=\mathbb{P}(X_i=(0,1))=\dfrac{1}{2}$. 记 $C_{n,m}$ 为粒子从 $(0,0)$ 到 $(mn,n)$ 且始终在直线 $y=\dfrac{x}{m}$ 及其上方运动的概率. 求

(1) 当 $m=1$ 时计算 $C_{n,1}$;

(2) 当 $m=2$ 时计算 $C_{3,2}$, 并验证序列 $\{C_{n,2}\}$ 的母函数 $G(s)$ 满足方程

$$G(s)=1+\frac{s}{8}G^3(s).$$

**解.** (1) 旋转 45 度后即为在 1 维简单对称随机游走模型中求 $\mathbb{P}(S_0=S_{2n}=0, S_1\geqslant 0,\cdots,S_{2n-1}\geqslant 0)$. 该问已在课堂中用数列母函数方法求解过. 也可利用作业题 **3.10.1**, 结合

$$\mathbb{P}(S_0=S_{2n}=0, S_1\geqslant 0,\cdots,S_{2n-1}\geqslant 0)=2\mathbb{P}(S_0=0, S_{2n+1}=-1, S_1\geqslant 0,\cdots,S_{2n}\geqslant 0)$$

即可. 答案为 $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n(n+1)}$.

(2) $C_{3,2}=\dfrac{12}{2^9}=\dfrac{3}{128}$. 记 $a_k=8^kC_{k,2}$ 为符合题意的路径个数. 我们注意到

- 若首次与直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 相交于 $(a_1,b_1)$, 则必经过 $(a_1-1,b_1)$;
- 若首次与直线 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ 相交于 $(a_2,b_2)$, 则必经过 $(a_2-1,b_2)$;
- 第一步必定向上走至 $(0,1)$.

这里 $a_i,b_i$ 为正整数. 对于一条从 $(0,0)$ 到 $(2n,n)$ 且始终在直线 $y=\dfrac{x}{2}$ 及其上方运动的路径, 必有

$$\{(0,1)\to(a_2-1,b_2),\quad (a_2,b_2)\to(a_1-1,b_1),\quad (a_1,b_1)\to(2n,n)\}$$

一一对应, 其中 $b_1=\dfrac{a_1}{2}, b_2=\dfrac{a_2+1}{2}$ 且均为正整数. 故对于 $G(s)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{8^k}s^k$, 有

$$a_n=\sum_{b_1,b_2}a_{b_1-1}a_{b_2-b_1}a_{n-b_2}.$$

所以

$$\frac{a_n}{8^n}=\frac{1}{8}\sum_{b_1,b_2}\frac{a_{b_1-1}}{8^{b_1-1}}\frac{a_{b_2-b_1}}{8^{b_2-b_1}}\frac{a_{n-b_2}}{8^{n-b_2}}.$$

因此

$$G(s)=1+\frac{s}{8}G^3(s).$$

□

## 4 $\mathbb{Z}^d$ 上简单对称随机游走的常返性 *

一个醉汉从某点出发, 他总有一个时刻能回到该点. 但是给鸟打一针醉药后, 它做不到. 当然我们需要假设他们醉到天花板, 一直游走且不会“寿终”. 该问题即为 $\mathbb{Z}^d$ 上简单对称随机游走的常返性问题.

**例 4.1.** 一质点从原点出发, 在 $\mathbb{Z}^d$ 上做简单对称随机游走, 若事件“质点从之后存在某个时刻回到原点”是必然事件, 则称该随机游走是常返的. 试探究 $\mathbb{Z}^d$ 上简单对称随机游走的常返性与维数 $d$ 的关系.

**解.** 我们先证明如下引理:

**引理 4.1.** 条件同上. 记 $p_{00}^{(n)}$ 表示从原点出发的质点, 经过 $n$ 步后又回到原点的概率, 则该随机游走是常返的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = +\infty.$$

**证明.** 定义 $N_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\{S_n=0\}}$ 表示质点经过点 0 的次数, $\tau_m^k = \inf\{n \geqslant \tau_m^{k-1} : S_n = m\}$, $\tau_m^0 = 0$, $\rho_0$ 表示事件 "之后存在某个时刻回到原点" 发生的概率, 显然 $0 \leqslant \rho_0 \leqslant 1$. 由定义知, $\rho_0 = 1$ 等价于该随机游走常返. 由定义知, $\mathbb{P}(\tau_0^1 - \tau_0^0 < \infty) = \rho_0$, 同时我们有 $\tau_m^{k+1} - \tau_m^k$ 与 $\tau_m^k - \tau_m^{k-1}$ 独立同分布 (即为强马氏性, 感兴趣者自行验证), 故 $\tau_m^{k+1} - \tau_m^k \overset{d}{=\!=} \tau_m^1 - \tau_m^0$. 由此可推得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_0 \geqslant k) &= \mathbb{P}(\tau_0^k < \infty) = \mathbb{P}(\tau_0^k < \infty, \tau_0^{k-1} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_0^k - \tau_0^{k-1} < \infty, \tau_0^{k-1} < \infty) \\
&= \mathbb{P}(\tau_0^k - \tau_0^{k-1} < \infty)\mathbb{P}(\tau_0^{k-1} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_0^1 - \tau_0^0 < \infty)\mathbb{P}(\tau_0^{k-1} < \infty) \\
&= \rho_0 \mathbb{P}(\tau_0^{k-1} < \infty) \\
&\ \vdots \\
&= \rho_0^k.
\end{aligned}$$

利用 Fubini 定理, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_0[I_{\{S_n=0\}}] = \mathbb{E}_0[N_0] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_0 \geqslant k) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_0^k.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_0^k = \begin{cases} +\infty, & \rho_0 = 1, \\ \dfrac{1}{1-\rho_0} < \infty, & 0 \leqslant \rho_0 < 1. \end{cases}$$

故引理得证. □

回到原题. 利用 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ $(n \to \infty)$, 当 $d = 1$ 时, 有 $p_{00}^{(2n)} = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n} = O(n^{-\frac{1}{2}})$, $d = 2$ 时, 若质点在平面沿上下左右方向游走后回到原点, 则其向上与向下的步数相等, 向左与向右的步数相等, 且向上和向右的步数和为 $n$. 故有

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{((2n)!)}{k!k!(n-k)!(n-k)!} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{16^n}\binom{2n}{n}^2 = O(n^{-1}).$$

这里 $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{2n}{n}$. $d \geqslant 3$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
p_{00}^{(2n+1)} &= 0, \\
p_{00}^{(2n)} &= \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_{d-1} \geqslant 0 \\ i_1 + \cdots + i_{d-1} \leqslant n}} \frac{(2n)!}{(i_1!)^2 (i_2!)^2 \cdots (i_{d-1}!)^2 ((n - i_1 - \cdots - i_{d-1})!)^2} (2d)^{-2n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{-2n}\binom{2n}{n}\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{d-1}\geqslant 0\\ i_1+\cdots+i_{d-1}\leqslant n}}\left(d^{-n}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_{d-1}!(n-i_1-\cdots-i_{d-1})!}\right)^2\\
&\leqslant 2^{-2n}\binom{2n}{n}\max_{\substack{i_1,\cdots,i_{d-1}\geqslant 0\\ i_1+\cdots+i_{d-1}\leqslant n}}\left(d^{-n}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_{d-1}!(n-i_1-\cdots-i_{d-1})!}\right)\\
&\times\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{d-1}\geqslant 0\\ i_1+\cdots+i_{d-1}\leqslant n}}d^{-n}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_{d-1}!(n-i_1-\cdots-i_{d-1})!}
\end{aligned}
$$

一方面,

$$
\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{d-1}\geqslant 0\\ i_1+\cdots+i_{d-1}\leqslant n}}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_{d-1}!(n-i_1-\cdots-i_{d-1})!}=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{d\text{个}})^n=d^n.
$$

另一方面, 存在 $C_1>0$, 使得

$$
\max_{\substack{i_1,\cdots,i_{d-1}\geqslant 0\\ i_1+\cdots+i_{d-1}\leqslant n}}\left(d^{-n}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_{d-1}!(n-i_1-\cdots-i_{d-1})!}\right)\leqslant C_1d^{-n}\frac{n!}{\left(\frac{n}{d}!\right)^d}
$$

利用 Stirling 公式, 我们有

$$
C_1d^{-n}\frac{n!}{\left(\frac{n}{d}!\right)^d}\xrightarrow{n\to\infty}d^{-n}\frac{n^n}{\left(\left(\frac{n}{d}\right)^{n/d}\right)^d}\sqrt{\frac{n}{\left(\frac{n}{d}\right)^d}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}\leqslant C_2n^{-\frac{d-1}{2}},
$$

其中 $C_2$ 为大于 0 的常数. 再由 Stirling 公式知,

$$
p_{00}^{(2n)}=C_22^{-2n}\binom{2n}{n}n^{-\frac{d-1}{2}}\leqslant C_3n^{-\frac{d}{2}},
$$

其中 $C_3$ 为大于 0 的常数. 所以

$$
p_{00}^{(n)}=O(n^{-\frac{d}{2}})\quad(n\to\infty).
$$

因此

$$
\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\begin{cases}+\infty, & d=1,2,\\ <\infty, & d\geqslant 3.\end{cases}
$$

由**引理 4.1** 知, $d=1,2$ 时该随机游走常返, $d\geqslant 3$ 时该随机游走不常返.

□